2018학년도 3월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 '가'형 정답

1	④	2	②	3	①	4	③	5	③
6	②	7	⑤	8	④	9	⑤	10	④
11	①	12	②	13	③	14	①	15	⑤
16	③	17	①	18	②	19	④	20	④
21	⑤	22	16	23	4	24	13	25	18
26	600	27	12	28	128	29	2	30	67

해 설

1. [출제의도] 다항식의 덧셈을 계산한다.

두 다항식 $A=x^2-1$, $B=x^2+2x+7$에서

$$\begin{aligned}2A+B&=2(x^2-1)+(x^2+2x+7)\\&=2x^2-2+x^2+2x+7\\&=3x^2+2x+5\end{aligned}$$

2. [출제의도] 교집합의 원소의 합을 구한다.

두 집합 $A=\{1, 2, 4, 6\}$, $B=\{2, 4, 5\}$에서

$A\cap B=\{2, 4\}$이므로

$A\cap B$의 모든 원소의 합은

$2+4=6$

3. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그를 계산한다.

$$\begin{aligned}\log_2 8+\log_2\frac{1}{2}&=\log_2\left(8\times\frac{1}{2}\right)\\&=\log_2 4\\&=2\end{aligned}$$

4. [출제의도] 복소수의 곱셈을 계산한다.

$$\begin{aligned}(1+2i)(1-2i)&=1^2-(2i)^2\\&=1-(-4)\\&=5\end{aligned}$$

5. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 나머지를 구한다.

$f(x)=2x^3-3x+4$라 하면 나머지정리에 의하여

$f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $f(1)$이므로

$f(1)=2-3+4=3$

6. [출제의도] 두 직선의 수직 조건을 이용하여 상수의 값을 구한다.

직선 $x+y+2=0$의 기울기는 -1이고,

직선 $(a+2)x-3y+1=0$의 기울기는 $\dfrac{a+2}{3}$이다.

두 직선 $x+y+2=0$, $(a+2)x-3y+1=0$이 서로 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

따라서 $(-1)\times\dfrac{a+2}{3}=-1$이므로

$a=1$

7. [출제의도] 연립이차부등식의 해를 구한다.

연립부등식 $\begin{cases}2x-7\ge 0\\x^2-5x-14<0\end{cases}$

을 풀면 $2x-7\ge 0$에서 $x\ge\dfrac{7}{2}$ …… ㉠

$x^2-5x-14<0$에서 $(x-7)(x+2)<0$

$-2<x<7$ …… ㉡

이므로 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$\dfrac{7}{2}\le x<7$

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 4, 5, 6이므로 모든 정수 x의 값의 합은

$4+5+6=15$

8. [출제의도] 이차방정식의 판별식을 이용하여 자연수의 개수를 구한다.

$(a^2-9)x^2=a+3$

$(a+3)(a-3)x^2=a+3$

a는 자연수이므로 $a+3>0$

$(a-3)x^2=1$

이차방정식 $(a-3)x^2-1=0$의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$D=0^2-4(a-3)(-1)=4(a-3)>0$

$a-3>0$, $a>3$

따라서 10보다 작은 자연수 a는

4, 5, 6, 7, 8, 9

이므로 a의 개수는 6이다.

[다른 풀이]

$(a^2-9)x^2=a+3$

$(a+3)(a-3)x^2=a+3$

a는 자연수이므로 $a+3>0$

$(a-3)x^2=1$

$x^2=\dfrac{1}{a-3}$

이차방정식이 두 실근을 가지므로 $\dfrac{1}{a-3}>0$

$a-3>0$이므로 $a>3$

따라서 10보다 작은 자연수 a는

4, 5, 6, 7, 8, 9

이므로 a의 개수는 6이다.

9. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구한다.

$2^{\frac{a}{2}}-2^{\frac{b}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$\left(2^{\frac{a}{2}}-2^{\frac{b}{2}}\right)^2=3^2$

$$\begin{aligned}2^a-2\times2^{\frac{a}{2}}\times2^{\frac{b}{2}}+2^b&=2^a-2^{\frac{a+b}{2}+1}+2^b\\&=9\end{aligned}$$

$a+b=2$이므로

$2^a+2^b-2^{\frac{2}{2}+1}=2^a+2^b-2^2=9$

따라서 $2^a+2^b=9+4=13$

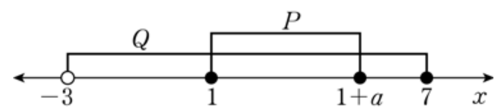
10. [출제의도] 충분조건과 이차부등식의 성질을 이용하여 자연수의 개수를 구한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

a는 자연수이므로 $1<1+a$이다.

$P=\{x|1\le x\le 1+a\}$

$Q=\{x|-3<x\le 7\}$



p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$이어야 한다.

따라서

$1+a\le 7$, $a\le 6$

자연수 a는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 a의 개수는 6이다.

11. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식의 해를 구한다.

부등식 $|3x-2|\le x+6$ 에서

(i) $x\ge\dfrac{2}{3}$일 때, $3x-2\ge 0$이므로

$3x-2\le x+6$

$2x\le 8$, $x\le 4$

따라서 $\dfrac{2}{3}\le x\le 4$

(ii) $x<\dfrac{2}{3}$일 때, $3x-2<0$이므로

$-(3x-2)\le x+6$

$-4\le 4x$, $-1\le x$

따라서 $-1\le x<\dfrac{2}{3}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-1\le x\le 4$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=4$

$\alpha+\beta=(-1)+4=3$

12. [출제의도] 도형의 이동과 유리함수의 그래프의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

함수 $f(x)$의 그래프는 곡선 $y=-\dfrac{2}{x}$를 평행이동한 것이므로 두 상수 m, n에 대하여

$f(x)=-\dfrac{2}{x-m}+n$

이라 하자. 함수 $f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$의 두 점근선 $x=m$, $y=n$의 교점 (m, n)이 직선 $y=x$ 위에 있다.

따라서 $m=n$

함수 $f(x)$의 정의역이 $\{x|x\ne -2$ 인 모든 실수$\}$이므로 $m=-2$, $n=-2$이다.

$f(x)=-\dfrac{2}{x+2}-2$이므로

$$\begin{aligned}f(4)&=-\frac{2}{4+2}-2\\&=-\frac{1}{3}-2\\&=-\frac{7}{3}\end{aligned}$$

13. [출제의도] 등차수열의 일반항을 이해하여 수열의 항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=20+(n-1)d$, $a_{n+1}=20+nd$

$b_n=a_n+a_{n+1}$이므로

$$\begin{aligned}b_n&=a_n+a_{n+1}\\&=\{20+(n-1)d\}+(20+nd)\\&=40+(2n-1)d\end{aligned}$$

$a_{10}=b_{10}$이므로

$20+9d=40+19d$에서

$-10d=20$, $d=-2$

따라서

$$\begin{aligned}b_n&=40-2(2n-1)\\&=42-4n\end{aligned}$$

이므로

$b_8=42-4\times8=42-32=10$

[다른 풀이]

$b_{10}=a_{10}+a_{11}$이고 $a_{10}=b_{10}$이므로

$a_{11}=0$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{11}=20+10d=0$

$d=-2$

따라서 $a_n=20-2(n-1)=22-2n$이므로

$$\begin{aligned}b_8&=a_8+a_9\\&=(22-2\times8)+(22-2\times9)\\&=10\end{aligned}$$

14. [출제의도] 삼차방정식의 근을 이해하여 식의 값을 구한다.

$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=x^7+x^6+x^5+x^4$

좌변을 전개하면

$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7$

이므로

$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7=x^7+x^6+x^5+x^4$

$1+x+x^2+x^3=0$

$(1+x)+x^2(1+x)=0$

$(1+x)(1+x^2)=0$

$x=-1$ 또는 $x^2=-1$

따라서 주어진 방정식의 세 근은 -1, i, $-i$이므로

$$\begin{aligned}\alpha^4+\beta^4+\gamma^4&=(-1)^4+i^4+(-i)^4\\&=1+1+1=3\end{aligned}$$

[다른 풀이]

우변을 인수분해하면

$x^4(x^3+x^2+x+1)=x^4\{x^2(x+1)+x+1\}$

$\qquad\qquad\qquad\quad =x^4(x^2+1)(x+1)$

$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=x^4(1+x)(1+x^2)$

$(1+x)(1+x^2)(1+x^4-x^4)=0$

$(1+x)(1+x^2)=0$

$x=-1$ 또는 $x^2=-1$

따라서 주어진 방정식의 세 근은 $-1,\ i,\ -i$이므로

$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=(-1)^4+i^4+(-i)^4$

$\qquad\qquad\quad =1+1+1=3$

15. [출제의도] 거듭제곱근을 이해하여 자연수의 개수를 구한다.

$\sqrt[5]{8}$이 자연수 N의 n제곱근이므로 거듭제곱근의 정의에 의하여 $(\sqrt[5]{8})^n=N$이다. 따라서

$N=(\sqrt[5]{8})^n=8^{\frac{n}{5}}=(2^3)^{\frac{n}{5}}=2^{\frac{3n}{5}}$

N은 자연수이므로 n의 값은 5의 배수이다.

따라서 $\sqrt[5]{8}$이 어떤 자연수 N의 n제곱근이 되도록 하는 두 자리 자연수 n은 10, 15, 20, $\cdots$, 95이므로 n의 개수는 18이다.

16. [출제의도] 부등식의 영역의 최대·최소를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

두 메뉴 A, B를 각각 x인분, y인분 만든다고 하면

$x\geq 0,\ y\geq 0$ $\cdots\cdots$ ㉠

하루에 최대 35인분을 만들 수 있으므로

$x+y\leq 35$ $\cdots\cdots$ ㉡

재료 S의 가격은 10g당 600원이므로 두 메뉴 A, B 1인분을 만들기 위한 재료 S의 구입 비용은 각각 6000원, 3000원이다. 따라서 하루 동안 사용할 재료 S의 구입 비용은 $6000x+3000y$(원)이다.

재료 T의 가격은 10g당 400원이므로 두 메뉴 A, B 1인분을 만들기 위한 재료 T의 구입 비용은 각각 2000원, 6000원이다. 따라서 하루 동안 사용할 재료 T의 구입 비용은 $2000x+6000y$(원)이다.

하루에 사용할 수 있는 두 재료 S, T의 구입 비용은 최대 30만 원이므로

$(6000x+3000y)+(2000x+6000y)\leq 300000$

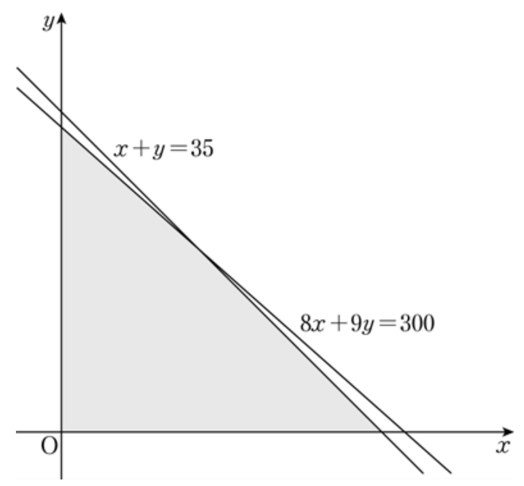
$8000x+9000y\leq 300000$

$8x+9y\leq 300$ $\cdots\cdots$ ㉢

좌표평면 위에 세 부등식 ㉠, ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 영역을 나타내면 그림과 같이 두 직선

$x+y=35,\ 8x+9y=300$

과 x축, y축으로 둘러싸인 부분이다.



한편, 하루 동안 두 메뉴 A, B를 각각 x인분, y인분 판매하여 얻을 수 있는 판매 금액은

$20000x+22000y$(원)이므로

$20000x+22000y=k$ (k는 양의 실수)라 하면

$10x+11y=\dfrac{k}{2000}$ $\cdots\cdots$ ㉣

이때 두 직선 $x+y=35,\ 8x+9y=300$과 직선 ㉣의 기울기의 관계가

$-1<-\dfrac{10}{11}<-\dfrac{8}{9}$

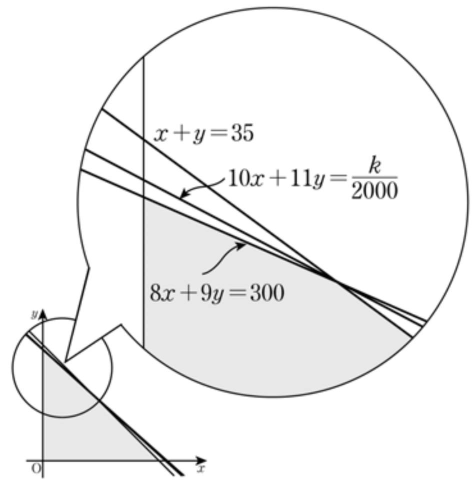
이므로 직선 ㉣이 두 직선

$x+y=35,\ 8x+9y=300$

이 만나는 점을 지날 때 k의 값은 최대이다.

두 직선 $x+y=35,\ 8x+9y=300$의 교점은 $(15,\ 20)$이고 따라서 식당에서 두 메뉴 A, B를 판매하여 얻을 수 있는 하루 최대 판매 금액은

$20000\times 15+22000\times 20=740000$(원)이다.



17. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 명제를 증명한다.

(ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=1\times 1=1$

(우변)$=\dfrac{1\times 2\times 3\times 4}{24}=1$

(좌변)=(우변)=$\boxed{1}$ 이므로 (*)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}k\{k+(k+1)+(k+2)+\cdots+m\}$

$=\dfrac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}$

이다. $n=m+1$일 때, (*)이 성립함을 보이자.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}k\{k+(k+1)+(k+2)+\cdots+(m+1)\}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}k\{k+(k+1)+\cdots+(m+1)\}$

$\displaystyle\qquad+\sum_{k=m+1}^{m+1}k\{k+(k+1)+\cdots+(m+1)\}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}k\{k+(k+1)+\cdots+(m+1)\}+\boxed{(m+1)^2}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}k\{k+(k+1)+\cdots+m\}$

$\displaystyle\qquad+(m+1)\sum_{k=1}^{m}k+\boxed{(m+1)^2}$

$=\boxed{\dfrac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}}$

$\qquad+\dfrac{m(m+1)^2}{2}+\boxed{(m+1)^2}$

$=\dfrac{(m+1)(m+2)(m+3)(3m+4)}{24}$

따라서 $n=m+1$일 때도 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다. 따라서

$a=1$

$f(m)=(m+1)^2$

$g(m)=\dfrac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}$

이므로

$a+f(2)+g(3)=1+(2+1)^2+\dfrac{3(3+1)(3+2)(3\times 3+1)}{24}$

$\qquad\qquad\quad =1+9+25$

$\qquad\qquad\quad =35$

18. [출제의도] 이차방정식과 집합의 연산을 이용하여 교집합의 원소의 개수를 구한다.

집합 A의 원소는 20 이하의 자연수 n에 대하여

$f(n)=(n^2-7n+11)(n^2+3n+3)$

이고 집합 B의 원소가 100 이하의 소수이므로 집합 $A\cap B$의 원소는 $f(n)=(n^2-7n+11)(n^2+3n+3)$ 중에서 100이하의 소수이다.

집합 $A\cap B$의 원소는 두 수

$n^2-7n+11,\ n^2+3n+3$

의 곱으로 나타낼 수 있고, n^2+3n+3이 1보다 큰 자연수이므로

$n^2-7n+11=1,\ n^2+3n+3=p$ (p는 소수)

가 되어야 한다.

$n^2-7n+11=1$

$n^2-7n+10=0$

$(n-2)(n-5)=0$

$n=2$ 또는 $n=5$

(ⅰ) $n=2$일 때,

$f(2)=1\times(2^2+3\times 2+3)=13$

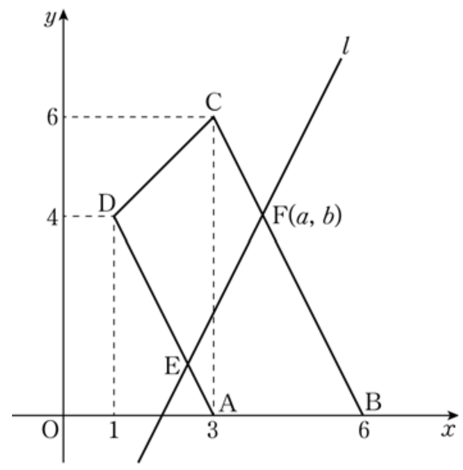
(ⅱ) $n=5$일 때,

$f(5)=1\times(5^2+3\times 5+3)=43$

(ⅰ), (ⅱ)에서 13과 43이 모두 100이하의 소수이므로 $A\cap B=\{13,\ 43\}$

따라서 $n(A\cap B)=2$

19. [출제의도] 선분의 내분점과 직선의 방정식을 활용하여 점의 좌표를 구한다.



직선 AD의 기울기는 $\dfrac{4-0}{1-3}=-2$

직선 BC의 기울기는 $\dfrac{6-0}{3-6}=-2$

에서 두 직선 AD, BC는 평행이므로 사각형 ABCD는 사다리꼴이다.

두 밑변의 길이가 각각 $a,\ b$이고 높이가 h인 사다리꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times(a+b)\times h$

이다. 직선 l이 사다리꼴 ABCD의 넓이를 이등분하려면 나누어진 두 개의 사다리꼴의 두 밑변의 길이의 합이 서로 같아야 한다.

선분 AD를 $1:3$으로 내분하는 점을 E라 하고 점 E를 지나는 직선 l이 사다리꼴 ABCD의 넓이를 이등분할 때, 선분 BC와 만나는 점 F에 대하여 점 F가 선분 BC를 $m:n$으로 내분한다고 하자.

$\overline{AD}=2\sqrt{5}$, $\overline{BC}=3\sqrt{5}$이고

$\overline{AE}+\overline{BF}=\overline{DE}+\overline{CF}$ 이므로

$\dfrac{1}{4}\times 2\sqrt{5}+\dfrac{m}{m+n}\times 3\sqrt{5}=\dfrac{3}{4}\times 2\sqrt{5}+\dfrac{n}{m+n}\times 3\sqrt{5}$

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{3m}{m+n}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3n}{m+n}$

$\dfrac{3(m-n)}{m+n}=1$에서

$3m-3n=m+n$

$2m=4n,\ m=2n$

따라서 $m:n=2:1$ 이므로

점 F의 좌표는

$\mathrm{F}\left(\dfrac{2\times 3+1\times 6}{3},\ \dfrac{2\times 6+1\times 0}{3}\right)$

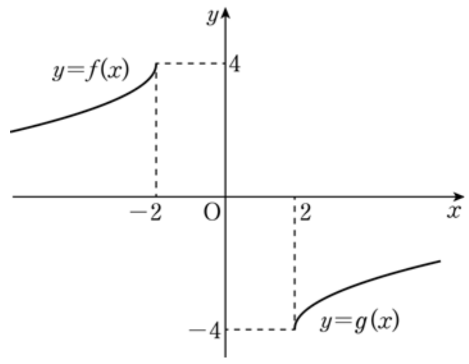
에서 $\mathrm{F}(4, 4)$이다.
따라서 $a=4$, $b=4$이므로
$a+b=8$

20. [출제의도] 무리함수의 그래프의 성질을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판단한다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$를
$f(x)=-\sqrt{kx+2k}+4$, $g(x)=\sqrt{-kx+2k}-4$
라 하자.

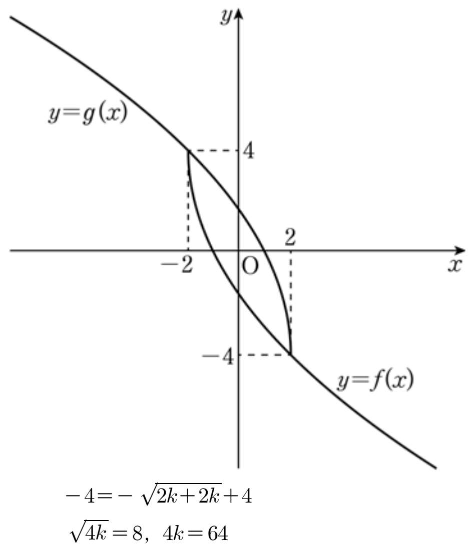
ㄱ. $f(-x)=-\sqrt{-kx+2k}+4$
$=-(\sqrt{-kx+2k}-4)$
$=-g(x)$
이므로 $g(x)=-f(-x)$
따라서 두 곡선
$y=-\sqrt{kx+2k}+4$, $y=\sqrt{-kx+2k}-4$
는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $k<0$이면 두 곡선은 다음과 같다.



따라서 두 곡선은 만나지 않는다. (거짓)

ㄷ. (ⅰ) $k<0$일 때
ㄴ에 의하여 두 곡선은 만나지 않는다.
(ⅱ) $k>0$일 때
ㄱ에서 두 곡선은 원점에 대하여 대칭이고 k의 값이 커질수록 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=4$와 멀어지고 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=-4$와 멀어진다.
따라서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 최댓값은 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, -4)$를 지날 때이다.



$-4=-\sqrt{2k+2k}+4$
$\sqrt{4k}=8$, $4k=64$
따라서 $k=16$ (참)

21. [출제의도] 이차부등식과 이차함수의 성질을 이용하여 최댓값과 최솟값의 차를 구한다.

조건 (가)에서 $\dfrac{1-x}{4}=t$라 하면 $x=1-4t$이고,
부등식 $f\left(\dfrac{1-x}{4}\right)\leq 0$의 해가 $-7\leq x\leq 9$이므로
$-7\leq 1-4t\leq 9$, $-2\leq t\leq 2$
따라서 $f(t)=k(t-2)(t+2)$ $(k>0)$에서
$f(x)=k(x-2)(x+2)=k(x^2-4)$ …… ㉠
라 할 수 있다.
조건 (나)에서 부등식
$f(x)\geq 2x-\dfrac{13}{3}$
이 항상 성립하므로 이차부등식
$kx^2-2x-4k+\dfrac{13}{3}\geq 0$
의 해는 모든 실수이다. 따라서 방정식
$kx^2-2x-4k+\dfrac{13}{3}=0$
의 판별식을 D라 놓으면
$\dfrac{D}{4}=1-k\left(-4k+\dfrac{13}{3}\right)$
$=4k^2-\dfrac{13}{3}k+1\leq 0$
$12k^2-13k+3\leq 0$
$(4k-3)(3k-1)\leq 0$
$\dfrac{1}{3}\leq k\leq \dfrac{3}{4}$
㉠에서 $f(3)=5k$이므로
$\dfrac{5}{3}\leq f(3)\leq \dfrac{15}{4}$
따라서 $M=\dfrac{15}{4}$, $m=\dfrac{5}{3}$에서
$M-m=\dfrac{15}{4}-\dfrac{5}{3}=\dfrac{25}{12}$

[다른 풀이]
0이 아닌 실수 k와 두 상수 a, b에 대하여
$f(x)=k(x-a)(x-b)$라 하자.
조건 (가)에서 $f\left(\dfrac{1-x}{4}\right)\leq 0$
$k\left(\dfrac{1-x}{4}-a\right)\left(\dfrac{1-x}{4}-b\right)\leq 0$
$k\left(\dfrac{1-4a-x}{4}\right)\left(\dfrac{1-4b-x}{4}\right)\leq 0$
부등식 $k(x+4a-1)(x+4b-1)\leq 0$의 해가
$-7\leq x\leq 9$이므로 $k>0$
$-4a+1=-7$, $-4b+1=9$라 하면
$a=2$, $b=-2$
따라서 $f(x)=k(x-2)(x+2)=k(x^2-4)$ …… ㉠
조건 (나)에서 부등식
$f(x)\geq 2x-\dfrac{13}{3}$
이 항상 성립하므로 이차부등식
$kx^2-2x-4k+\dfrac{13}{3}\geq 0$
의 해는 모든 실수이다. 따라서 방정식
$kx^2-2x-4k+\dfrac{13}{3}=0$
의 판별식을 D라 놓으면
$\dfrac{D}{4}=1-k\left(-4k+\dfrac{13}{3}\right)=4k^2-\dfrac{13}{3}k+1\leq 0$
$12k^2-13k+3\leq 0$, $(4k-3)(3k-1)\leq 0$
$\dfrac{1}{3}\leq k\leq \dfrac{3}{4}$
㉠에서 $f(3)=5k$이므로
$\dfrac{5}{3}\leq f(3)\leq \dfrac{15}{4}$
따라서 $M=\dfrac{15}{4}$, $m=\dfrac{5}{3}$에서
$M-m=\dfrac{15}{4}-\dfrac{5}{3}=\dfrac{25}{12}$

22. [출제의도] 등비수열의 성질을 이용하여 주어진 항을 구한다.

첫째항이 $\dfrac{1}{2}$이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은
$a_n=\dfrac{1}{2}\times 2^{n-1}=2^{n-2}$
따라서 $a_6=2^4=16$

[다른 풀이]
첫째항이 $\dfrac{1}{2}$이고 공비가 2인 등비수열$\{a_n\}$을 순서대로 나열하면
$\{a_n\}$: $\dfrac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, …
따라서 $a_6=16$

23. [출제의도] 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 알고 식의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2+8x-2=0$의 두 근을 α, β라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-8$, $\alpha\beta=-2$
따라서 $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-8}{-2}=4$

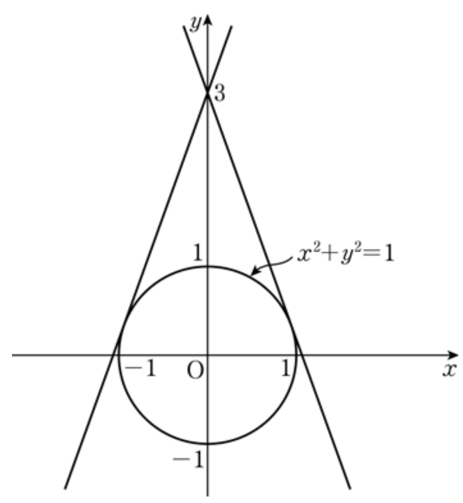
[다른 풀이]
이차방정식 $x^2+8x-2=0$의 근을 구하면
$x=-4\pm 3\sqrt{2}$이므로
$\alpha+\beta=(-4+3\sqrt{2})+(-4-3\sqrt{2})$
$=-8$
$\alpha\beta=(-4+3\sqrt{2})(-4-3\sqrt{2})$
$=-2$
따라서 $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-8}{-2}=4$

24. [출제의도] 역함수를 이해하여 함숫값을 구한다.

$(g\circ f^{-1})(2)=g(f^{-1}(2))$
$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$
$\dfrac{1}{2}k=2$, $k=4$
따라서 $g(f^{-1}(2))=g(4)=13$

[다른 풀이]
$f(x)=\dfrac{1}{2}x$이므로 함수 $f^{-1}(x)$는
$x=\dfrac{1}{2}y$에서 $y=2x$
즉, $f^{-1}(x)=2x$이므로
$(g\circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))$
$=g(2x)$
$=4x+5$
따라서
$(g\circ f^{-1})(2)=4\times 2+5$
$=13$

25. [출제의도] 원의 접선의 방정식을 이해하여 점의 좌표를 구한다.



점 $(0, 3)$을 지나고 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 직선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은
$y=mx+3$ 즉, $mx-y+3=0$
원의 중심 $(0, 0)$에서 직선 $mx-y+3=0$까지의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로
$\dfrac{|m\times 0-0+3|}{\sqrt{m^2+1}}=1$
$3=\sqrt{m^2+1}$, $m^2=8$
$m=2\sqrt{2}$, $m=-2\sqrt{2}$
(ⅰ) $m=2\sqrt{2}$일 때
접선의 방정식이 $y=2\sqrt{2}x+3$이므로
x축과 만나는 점의 x좌표 k는

$k=-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ 에서 $k^2=\dfrac{9}{8}$

(ii) $m=-2\sqrt{2}$ 일 때

접선의 방정식이 $y=-2\sqrt{2}x+3$ 이므로

x축과 만나는 점의 x좌표 k는

$k=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ 에서 $k^2=\dfrac{9}{8}$

(i), (ii)에서 $16k^2=16\times\dfrac{9}{8}=18$

26. [출제의도] 연립방정식을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 R석의 티켓의 수를 a, S석의 티켓의 수를 b, A석의 티켓의 수를 c라 놓으면

$a+b+c=1500$ …… ㉠

조건 (나)에서 R석, S석, A석 티켓의 가격은 각각 10만 원, 5만 원, 2만 원이므로

$10a+5b+2c=6000$ …… ㉡

A석의 티켓의 수는 R석과 S석 티켓의 수의 합과 같으므로

$a+b=c$ …… ㉢

세 방정식 ㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

㉠, ㉢에서 $2c=1500$ 이므로 $c=750$

㉠, ㉡에서 연립방정식

$\begin{cases} a+b=750 \\ 2a+b=900 \end{cases}$

을 풀면 $a=150$, $b=600$ 이다.

따라서 구하는 S석의 티켓의 수는 600

27. [출제의도] 일대일 대응의 뜻을 이용하여 함수의 최댓값을 구한다.

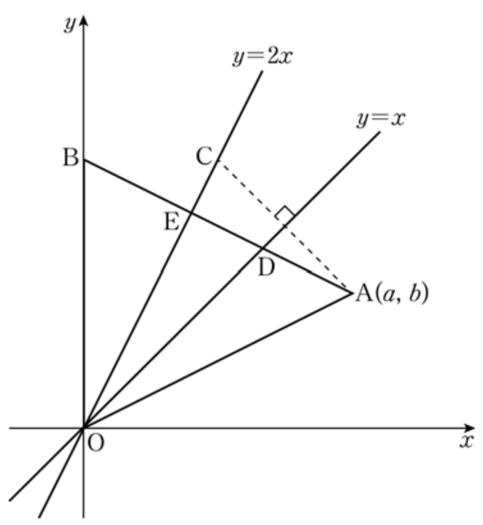
3 이상 5 이하의 자연수 n에 대하여 $f(n)f(n+2)$의 값이 짝수이므로

$f(3)\times f(5)$, $f(4)\times f(6)$, $f(5)\times f(7)$은 모두 짝수이다.

$f(4)$ 또는 $f(6)$은 적어도 하나가 짝수이고, 집합 X의 원소 중 짝수인 것은 4, 6뿐이므로 $f(3)\times f(5)$와 $f(5)\times f(7)$이 모두 짝수이려면 $f(5)$는 짝수가 되어야 한다.

따라서 $f(3)$, $f(7)$은 모두 홀수이므로 $f(3)+f(7)$의 최댓값은 $f(3)=5$, $f(7)=7$ 또는 $f(3)=7$, $f(7)=5$ 일 때 $5+7=12$ 이다.

28. [출제의도] 도형의 이동과 직선의 수직 조건을 이용하여 원의 둘레의 길이를 구한다.



두 상수 a, b에 대하여 점 A의 좌표를 (a, b)라 하면 점 C는 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 C의 좌표는 (b, a)이다.

점 C는 직선 $y=2x$ 위의 점이므로 $a=2b$이다.

따라서 점 A의 좌표는 $A(2b, b)$이다.

$\overline{OA}=2\sqrt{5}$ 이므로

$\overline{OA}^2=(2\sqrt{5})^2=20$

$(2b)^2+b^2=20$, $5b^2=20$

$b^2=4$ 에서 $b=2$

따라서 두 점 A, C의 좌표는

$A(4, 2)$, $C(2, 4)$

y축 위의 점 B의 좌표를 $(0, c)$라 하면

$\overline{AB}=\overline{OA}=2\sqrt{5}$, $\overline{AB}^2=(2\sqrt{5})^2=20$

$(4-0)^2+(2-c)^2=20$

$16+4-4c+c^2=20$

$-4c+c^2=0$, $c(c-4)=0$

$c>0$ 이므로 $c=4$

따라서 점 B의 좌표는 $(0, 4)$이다.

점 D는 직선 AB와 직선 $y=x$의 교점이므로

$x=-\dfrac{1}{2}x+4$, $\dfrac{3}{2}x=4$

$x=\dfrac{8}{3}$, $y=\dfrac{8}{3}$

따라서 $D\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$

한편, 직선 AB의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이고 직선 $y=2x$의 기울기는 2이므로 두 직선은 서로 수직이다.

따라서 삼각형 ODE는 $\angle OED=90^\circ$ 인 직각삼각형이고, 삼각형 ODE의 외접원의 지름의 길이는 선분 OD의 길이와 같다.

$\overline{OD}=\sqrt{\left(\dfrac{8}{3}\right)^2+\left(\dfrac{8}{3}\right)^2}=\dfrac{8}{3}\sqrt{2}$

삼각형 ODE의 외접원의 둘레의 길이는

$k\pi=\dfrac{8}{3}\sqrt{2}\pi$, $k=\dfrac{8}{3}\sqrt{2}$

따라서

$9k^2=9\times\left(\dfrac{8}{3}\sqrt{2}\right)^2$

$=9\times\dfrac{128}{9}$

$=128$

29. [출제의도] 절댓값과 이차함수의 성질을 이용하여 상수의 최솟값을 구한다.

$x^2+2x-8=(x+4)(x-2)=0$

$x=-4$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 $x=-4$와 $x=2$이다.

부등식 $\dfrac{|f(x)|}{3}-f(x)\geq m(x-2)$ 에서

(i) $f(x)\geq 0$, 즉 $x\leq -4$ 또는 $x\geq 2$일 때

$\dfrac{f(x)}{3}-f(x)\geq m(x-2)$ 이므로

$-\dfrac{2}{3}f(x)\geq m(x-2)$

(ii) $f(x)<0$, 즉 $-4<x<2$일 때

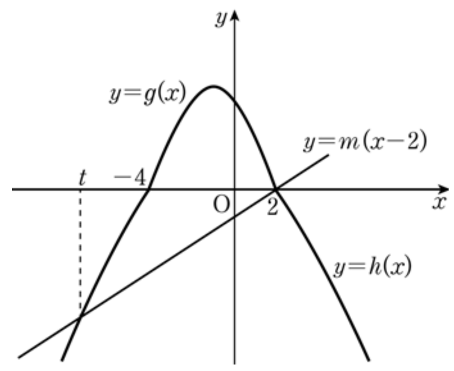
$-\dfrac{f(x)}{3}-f(x)\geq m(x-2)$ 이므로

$-\dfrac{4}{3}f(x)\geq m(x-2)$

여기서 $g(x)=-\dfrac{4}{3}f(x)$, $h(x)=-\dfrac{2}{3}f(x)$ 라 하면

$\dfrac{|f(x)|}{3}-f(x)=\begin{cases} g(x)\ (-4<x<2) \\ h(x)\ (x\leq -4,\ x\geq 2) \end{cases}$

한편, 직선 $y=m(x-2)$는 점 $(2, 0)$을 지나고 기울기 m이 양수이므로 함수 $y=\dfrac{|f(x)|}{3}-f(x)$의 그래프와 직선 $y=m(x-2)$를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



직선 $y=m(x-2)$와 함수 $y=\dfrac{|f(x)|}{3}-f(x)$의 그래프의 교점의 x좌표를 $t\ (t<-4)$라 하면 부등식

$\dfrac{|f(x)|}{3}-f(x)\geq m(x-2)$

의 해는 $t\leq x\leq 2$

$t\leq x\leq 2$인 정수 x의 개수가 10이 되기 위한 실수 t의 범위는 $-8<t\leq -7$이고, m의 값의 범위는 직선 $y=m(x-2)$가 점 $(-7, h(-7))$을 지날 때보다 크거나 같고, 점 $(-8, h(-8))$을 지날 때보다 작다.

$t=-7$일 때

$h(-7)=-\dfrac{2}{3}\{(-7)^2+2\times(-7)-8\}=-\dfrac{2}{3}\times 27=-18$

이므로 $m=\dfrac{0-(-18)}{2-(-7)}=2$ …… ㉠

$t=-8$일 때

$h(-8)=-\dfrac{2}{3}\{(-8)^2+2\times(-8)-8\}=-\dfrac{2}{3}\times 40=-\dfrac{80}{3}$

이므로 $m=\dfrac{0-\left(-\dfrac{80}{3}\right)}{2-(-8)}=\dfrac{8}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 m의 범위는 $2\leq m<\dfrac{8}{3}$

따라서 m의 최솟값은 2이다.

30. [출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 활용하여 수열의 항을 구한다.

a_7, a_8, a_k가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

이 수열의 공비를 r라 하면

$a_8=a_7r$, $a_k=a_7r^2$ …… ㉠

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

조건 (가)에서

$a_n=a_1+(n-1)d$ (a_1은 정수, d는 자연수)

이므로

$a_8-a_7=d$, $a_k-a_8=(k-8)d$

이 식에 ㉠을 대입하면

$a_7(r-1)=d$, $a_7(r-1)r=(k-8)d$

위 식으로부터

$dr=(k-8)d$

$d\neq 0$ 이므로 $r=k-8$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a_k=a_7(k-8)^2$, $a_k=144=12^2$

위 식으로부터

$a_7(k-8)^2=12^2$

조건 (가)에서 $k-8$과 a_7이 정수이므로 a_7은 완전제곱수이다. 따라서 a_7은 12의 약수의 제곱수인

1, 2^2, 3^2, 4^2, 6^2, 12^2

중 하나이다.

(i) $a_7=1$일 때

$(k-8)^2=12^2$ 이므로

$k=20\ (k>8)$

(ii) $a_7=2^2$일 때

$(k-8)^2=6^2$ 이므로

$k=14\ (k>8)$

(iii) $a_7=3^2$일 때

$(k-8)^2=4^2$ 이므로

$k=12\ (k>8)$

(iv) $a_7=4^2$일 때

$(k-8)^2=3^2$ 이므로

$k=11\,(k>8)$

(v) $a_7=6^2$ 일 때

$(k-8)^2=2^2$ 이므로

$k=10\,(k>8)$

(vi) $a_7=12^2$ 일 때

$(k-8)^2=1$ 이므로

$k=9\,(k>8)$

그런데 $k=9$ 이면 ㉡에서 $r=1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 0 이다. 따라서 $k\neq 9$ 이다.

(i)~(vi)에서 구하는 모든 k 의 값의 합은

$20+14+12+11+10=67$