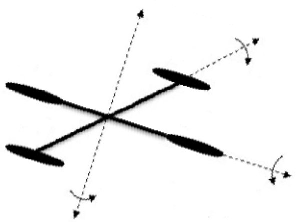
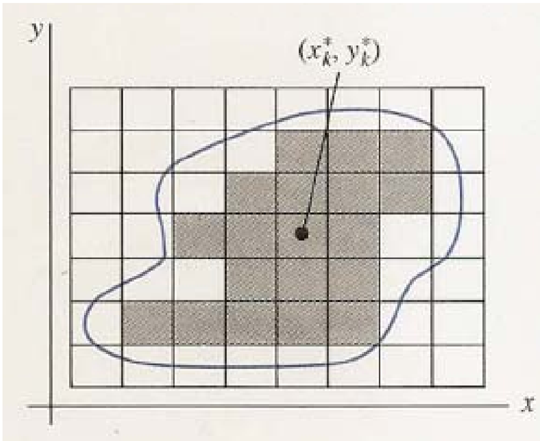
9장 벡터의 미적분
(8)

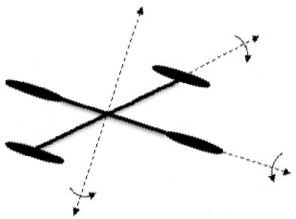


- 2차원 정적분

$z=f(x, y)$

1. f는 닫힌 유계 영역(closed and bounded region) R에서 정의된다.
2. 좌표축에 평행한 수직선과 수평선의 격자에 의하여, 영역 R의 분할(partition) P는 R 안에 완전히 포함되는 넓이 ΔA_k인 n개의 직사각형 부분영역 R_k를 형성한다.
3. $\| P \|$는 분할의 놈(norm), 즉 가장 긴 R_k의 대각선 길이이다.
4. 각 부분영역 R_k에서 점 (x_k^*, y_k^*)를 선택한다.
5. 합 $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k$를 구성한다.





정의 9.10 이중적분

함수 f가 닫힌 영역 R에서 정의된 2변수 함수이면 **R에 대한 f의 이중적분은**

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\, \Delta A_k \qquad (1)$$

이다.

정리 9.11 이중적분의 성질

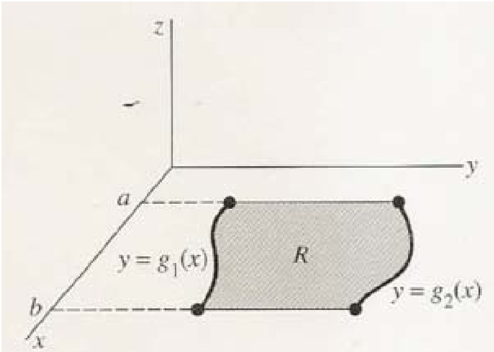
f와 g가 영역 R에서 적분 가능한 2변수 함수이면

(i) $\displaystyle\iint_R kf(x, y)\, dA = k\iint_R f(x, y)\, dA$ k는 상수

(ii) $\displaystyle\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA \pm \iint_R g(x, y)\, dA$

(iii) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$ R_1, R_2는 서로 중복되지 않는 R의 부분영역이고 $R = R_1 \cup R_2$이다.

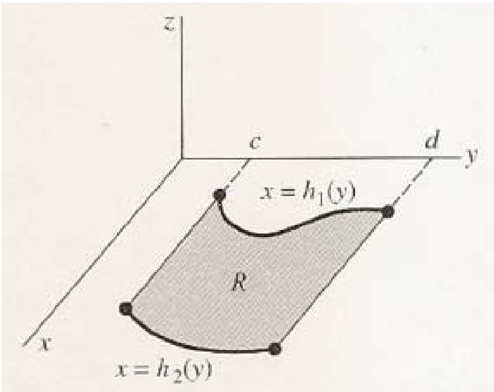
- 적분 영역의 구분



I 형

$$R: a \le x \le b, \qquad g_1(x) \le y \le g_2(x)$$

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx$$



II 형

$$R: c \le y \le d, \qquad h_1(y) \le x \le h_2(y)$$

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy$$

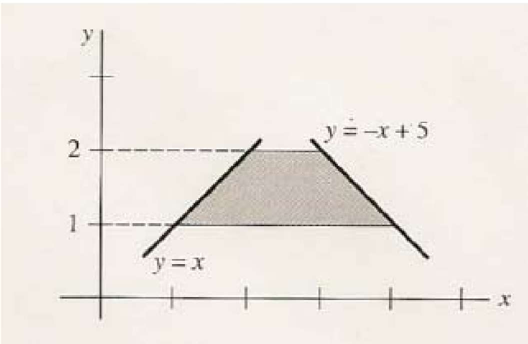
예제 1 이중적분의 계산

$y=1,\ y=2,\ y=x,\ y=-x+5$ 로 둘러싸인 영역 R에서 이중적분 $\iint_R e^{x+3y}\,dA$ 를 계산하라.

풀이 그림 9.73 에서와 같이 영역은 II 형이다. 따라서 (7)에 의하여 먼저 왼쪽 경계 $x=y$에서 오른쪽 경계 $x=5-y$까지 x에 관하여 적분한다.

$$\iint_R e^{x+3y}\,dA = \int_1^2 \int_y^{5-y} e^{x+3y}\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2 e^{x+3y}\Big]_y^{5-y} dy$$



$$= \int_1^2 (e^{5+2y} - e^{4y})\,dy = \left[\frac{1}{2}e^{5+2y} - \frac{1}{4}e^{4y}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}e^9 - \frac{1}{4}e^8 - \frac{1}{2}e^7 + \frac{1}{4}e^4 \approx 2771.64$$

예제 2 적분 순서 변경

제 1 사분면에서 $y=x^2$, $x=0$, $y=4$로 둘러싸인 영역이 R일 때 $\iint_R xe^{y^2}\,dA$를 계산하라.

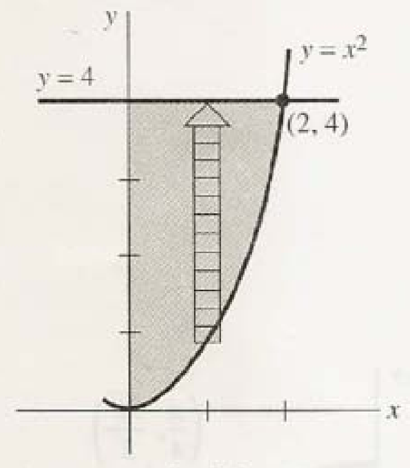
풀이 영역을 I 형으로 보면 그림 9.75(a)에서 $0 \le x \le 2$, $x^2 \le y \le 4$이므로

$$\iint_R xe^{y^2}\,dA = \int_0^2 \int_{x^2}^4 xe^{y^2}\,dy\,dx$$

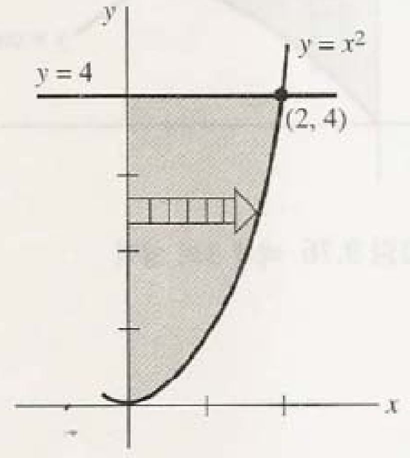
이다. 하지만 여기서 적분 $\int_{x^2}^4 xe^{y^2}\,dy$는 계산이 불가능하다. 왜냐하면 e^{y^2}의 y에 대한 역도함수(antiderivative)가 기본 함수로 나타나지 않기 때문이다. 그러나 주어진 영역을 그림 9.75(b)와 같이 $0 \le y \le 4$, $0 \le x \le \sqrt{y}$로 정의되는 II 형으로 생각하면 (7)에서

$$\begin{aligned}\iint_R xe^{y^2}\,dA &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2}\,dx\,dy \\ &= \int_0^4 \frac{x^2}{2}e^{y^2}\Big]_0^{\sqrt{y}}\,dy \\ &= \int_0^4 \frac{1}{2}ye^{y^2}\,dy = \frac{1}{4}e^{y^2}\Big]_0^4 = \frac{1}{4}(e^{16}-1)\end{aligned}$$

이다. ❑



(a) I형 영역



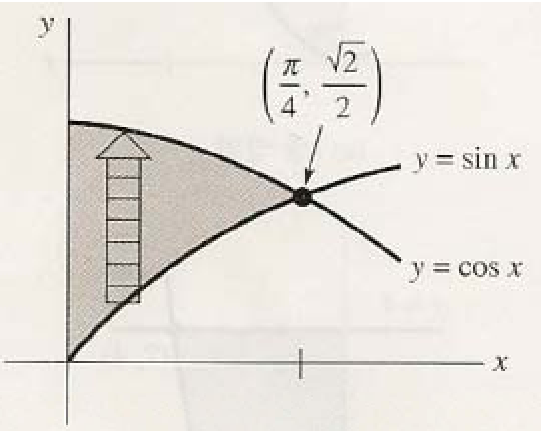
(b) II형 영역

예제 3 질량중심

얇은 판의 모양이 제1사분면의 $x=0$과 $x=\pi/4$ 사이에서 $y=\sin x$와 $y=\cos x$로 둘러싸인 영역이다. 밀도 $\rho(x, y)=y$일 때 질량중심을 구하라.

이다. 영역 R로 나타나는 얇은 판의 밀도가 음이 아니고 R에서 연속인 변하는 밀도 $\rho(x, y)$이면, 그 질량(mass)은 (8)과 유사하게 이중적분

$$m = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho f(x_k^*, y_k^*)\, \Delta A_k = \iint_R \rho(x, y)\, dA \qquad (9)$$



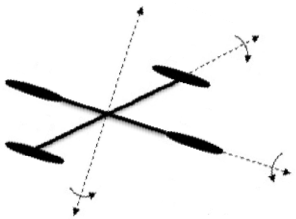
풀이 그림 9.76에서

$$m = \iint_R y\, dA = \int_0^{\pi/4}\int_{\sin x}^{\cos x} y\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sin x}^{\cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx \quad \leftarrow \text{배각공식}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx = \frac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}$$



로 정의한다. 얇은 판의 **질량중심**(center of mass)의 좌표는

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

이고, 여기서

$$M_y = \iint_R x\rho(x, y)\, dA \quad \text{그리고} \quad M_x = \iint_R y\rho(x, y)\, dA$$

$$M_y = \iint_R xy\, dA = \int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} xy\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} xy^2 \Big]_{\sin x}^{\cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} x \cos 2x\, dx \quad \leftarrow \text{부분적분}$$

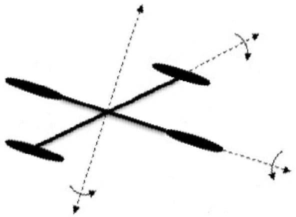
$$= \left[\frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi - 2}{16}$$

$$M_x = \iint_R y^2\, dA = \int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} y^2\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} (\cos^3 x - \sin^3 x)\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} [\cos x(1 - \sin^2 x) - \sin x(1 - \cos^2 x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \left[\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x\right]_0^{\pi/4} = \frac{5\sqrt{2} - 4}{18}$$



$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{(\pi - 2)/16}{1/4} \approx 0.29, \quad \text{그리고} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{(5\sqrt{2} - 4)/18)}{1/4} \approx 0.68$$

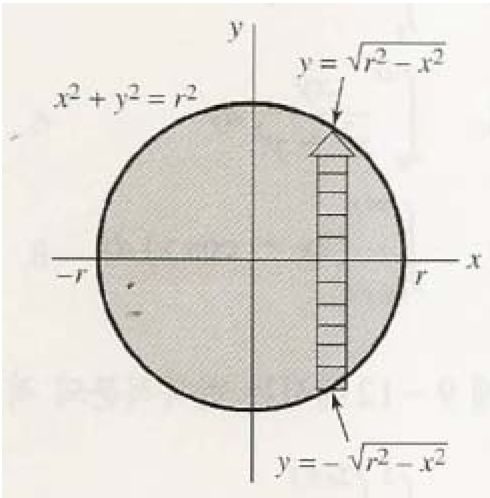
- 관성 모멘트

$$I_x = \iint_R y^2 \rho(x, y)\, dA \text{ 그리고 } I_y = \iint_R x^2 \rho(x, y)\, dA$$

예제 4 관성모멘트

그림 9.77과 같이 질량이 m인 얇은 균질성(homogeneous) 원판의 y축에 대한 관성모멘트를 구하라.

$\rho(x, y) = m/\pi r^2$



$$I_y = \iint_R x^2 \left(\frac{m}{\pi r^2}\right) dA = \frac{m}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} x^2\, dy\, dx$$

$$= \frac{2m}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} x^2 \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \quad \leftarrow \text{삼각함수 공식}$$

$$= \frac{2mr^2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{mr^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{mr^2}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 4\theta)\, d\theta = \frac{1}{4} mr^2$$